CEVAP ANAHTARI

Adı-Soyadı: **20.05.2019**

Numarası:

Fen – Edb. Fak. Mat. Bölümü Mat 302 Diferansiyel Geometri II Final Sınav Soruları

1. $\phi(u,v)=(u,v,uv)$ parametrik denklemi ile tanımlanan $\phi(E^2)=M$ yüzeyinin $P=(1,2,2)$ noktasındaki teğet düzlemini bulunuz.
2. M, E^n de bir hiperyüzey olsun. M üzerinde X_p ve Y_p; farklı asli eğriliklere karşılık gelen asli doğrultular ise X_p ve Y_p ortogonaldirler, gösteriniz.
3. E^3 de özel yüzeyler olan silindir, regle ve koni yüzeylerini tanımlayınız.
4. $x^3+y^3+z^3-3xyz-a^3=0$ yüzeyinin bir dönel yüzey belirttiğini gösterip paralellerini ve dönme eksenini bulunuz.
5. Düzlemde S^1 çemberinin topolojik manifold olduğunu gösteriniz. S^1 çemberinin bir atlasını bulunuz.

Başarılar
Prof. Dr. Emin KASAP

1- $\phi: E^2 \longrightarrow E^3$

$(u,v) \to \phi(u,v) = (u,v,uv)$ parametrelendirmesi için

$\begin{cases} \phi_u = (1,0,v) \\ \phi_v = (0,1,u) \end{cases}$ kısmi türevleri cinsinden yüzeyin normali

$$\phi_u \times \phi_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & u \end{vmatrix} = (-v,-u,1) \text{ olmak üzere}$$

$\vec{N} = \phi_u \times \phi_v = (-v,-u,1)$ bulunur.

$\phi(E^2) = M$ yüzeyinin $P = (1,2,2)$ noktasındaki teğet düzlemi:
$X = (x,y,z) \in E^3$ düzlemin temsilci noktası olmak üzere,

$\langle \vec{N}_{|P}, \vec{PX} \rangle = 0$ eşitliği ile bellidir.

$\vec{N}_P = (-v,-u,1)_{|P} = (-2,-1,1)$

$\vec{PX} = X - P = (x-1, y-2, z-2)$ ifadelerine göre

$\langle (-2,-1,1), (x-1, y-2, z-2) \rangle = 0$

$2x + y - z - 2 = 0$ elde edilir.

2- $S(X_P) = \lambda_1 X_P$, $S(Y_P) = \lambda_2 Y_P$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olsun. Şekil operatörü simetrik bir dönüşüm olduğundan

$\langle S(X_P), Y_P \rangle = \langle X_P, S(Y_P) \rangle$

eşitliği yazılır. Buradan,

$\langle \lambda_1 X_P, Y_P \rangle = \langle X_P, \lambda_2 Y_P \rangle$

$\lambda_1 \langle X_P, Y_P \rangle - \lambda_2 \langle X_P, Y_P \rangle = 0$

$\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} \langle X_P, Y_P \rangle = 0 \Rightarrow \langle X_P, Y_P \rangle = 0$ bulunur.

Bunun anlamı, X_P ve Y_P asli doğrultular ortogonaldir.

3- Silindir Yüzeyi : Sabit bir doğrultuya paralel kalacak şekilde bir uzay eğrisine dayanarak hareket eden doğruların meydana getirdiği yüzeye silindir yüzeyi denir.

$$\varphi : I \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
$$(t, \lambda) \to \varphi(t, \lambda) = \alpha(t) + \lambda \vec{U}$$

dönüşümünün görüntü kümesi silindir yüzeyidir, burada $\alpha(t)$'ye dayanak eğrisi, $\vec{U}$'yada sabit doğrultu adı verilir.

Regle Yüzey: Bir parametreye bağlı doğru ailesinin bir eğriye dayanarak oluşturduğu yüzeye regle (veya doğrusal) yüzey adı verilir. Analitik olarak

$$\varphi : I \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
$$(u, v) \to \varphi(u, v) = \alpha(u) + v \, \vec{a}(u)$$ şeklinde ifade edilir,

burada α-ya dayanak eğrisi adı verilir.

Koni Yüzeyi: Sabit bir noktadan geçen ve bir eğriye dayanarak hareket eden doğruların meydana getirdiği yüzeye koni yüzeyi adı verilir.

$$\varphi : I \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
$$(t, \lambda) \to \varphi(t, \lambda) = \alpha(t) + \lambda \, \vec{\delta}(t)$$ şeklinde ifade edilir, burada $\alpha(t)$; dayanak eğrisi ve $\delta(t)$ vektörü; sabit nokta ile her t-ye karşılık gelen eğri üzerindeki nokta ile bellidir.

4- $x^3+y^3+z^3-3xyz-a^3=0$ ifadesi

$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)-a^3=0$ halinde yazılır.

Yine, bu ifade

$$xy+xz+yz=\frac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2}$$ özdeşliği yardımıyla

$$(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-\frac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2}\right)-a^3=0$$ bulunur.

Buradan, verilen ifade

$$(x+y+z)\left[3(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2\right]-2a^3=0$$

veya

$$3(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^3-2a^3=0$$ halini alır.

Bu son eşitlik

$$\phi\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2,\ ax+by+cz\right)=0$$

formatına sahip olduğundan bir dönel yüzey belirtir. Bu yüzeyin paralelleri

$$C_{\lambda\lambda'} \cdots \left(x^2+y^2+z^2=\lambda',\ x+y+z=\lambda\right)$$

ve dönme ekseni

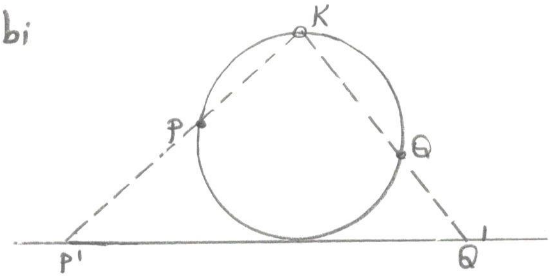
$$\Delta \cdots \frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}=t$$

olarak elde edilir.

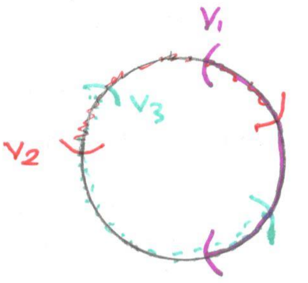
5- Düzlemde bir noktası çıkarılmış S^1 çemberi S_0^1 ile gösterilsin. S_0^1 çemberi 1-boyutlu topolojik manifolddur:

- S_0^1 çemberi E^2 de indirgenen topoloji ile bir topolojik manifolddur. S_0^1'in açıkları E^2'nin açıkları ile S_0^1'in arakesitinden oluşur. Yani, S_0^1'in açıkları çember yaylarıdır.

- $f: S_0^1 \to E^1$ dönüşümü yandaki gibi tanımlanırsa bir homeomorfizm olur.



- $\forall P, Q \in S_0^1$ ve $P \neq Q$ için P ve Q yu içeren A_P ve A_Q çember yayları $A_P \cap A_Q = \emptyset$ olacak biçimde bulunabilir. Yani, S_0^1 bir Hausdorff uzaydır.
- S_0^1 çemberi; birleşimleri S_0^1'i verecek biçimde çember yaylarına parçalanabilir. Yani, S_0^1 sonlu sayıda açıkla örtülebilir.



Şekildeki V_1, V_2, V_3 yayları için

$$S_0^1 = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \text{ dır.}$$

Şimdi $S^1 = \{ (x,y) \in E^2 \mid x^2+y^2=1 \}$ çemberinin atlasını bulalım:

S^1'in açıklarının çember yayları olduğundan yukarıda bahsettik. O halde,

$W_1 = \{(x_1, x_2) \in S^1 \mid x_1 > 0\}$, $W_2 = \{(x_1, x_2) \in S^1 \mid x_1 < 0\}$

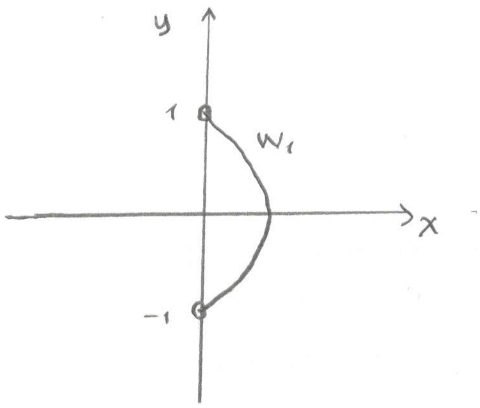
$W_3 = \{(x_1, x_2) \in S^1 \mid x_2 > 0\}$, $W_4 = \{(x_1, x_2) \in S^1 \mid x_2 < 0\}$

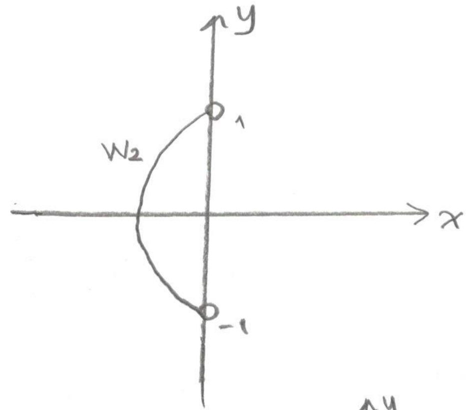
olmak üzere W_1, W_2, W_3 ve W_4 kümeleri S^1'in açıklarıdır.

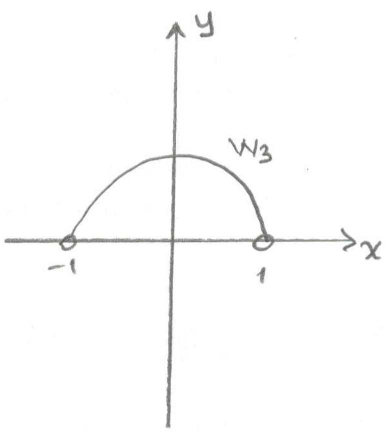
Ayrıca;

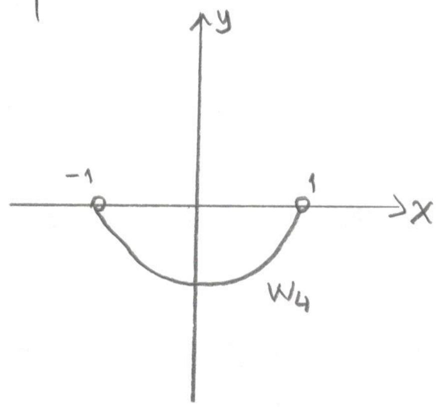
$$S^1 = W_1 \cup W_2 \cup W_3 \cup W_4 \quad \text{olduğundan}$$

$\{W_1, W_2, W_3, W_4\}$ kümesi S^1'in bir açık örtüsüdür.









$I = (-1, 1) = \{x_1 \in \mathbb{R} \mid -1 < x_1 < 1\}$ ve $J = (-1, 1) = \{x_2 \in \mathbb{R} \mid -1 < x_2 < 1\}$

açık aralıklarını alalım. $I, J \subset E^1$ açık alt kümelerdir.

$(x_1, x_2) \in W_1 \iff (x_1, x_2) \in S^1$ ve $x_1 > 0$

$\iff x_1^2 + x_2^2 = 1$ ve $x_1 > 0$

$\iff x_1 = \sqrt{1 - x_2^2}$ yazılır.

$$\varphi_1 : W_1 \subset S^1 \longrightarrow J \subset E^1$$

$(\sqrt{1-x_2^2}, x_2) \longrightarrow \varphi_1(\sqrt{1-x_2^2}, x_2) = x_2$ izdüşüm fonksiyonu

birebir, örten, sürekli ve

$$\varphi_1^{-1} : J \subset E^1 \longrightarrow W_1 \subset S^1$$
$$x_2 \longrightarrow \varphi_1^{-1}(x_2) = (\sqrt{1-x_2^2}, x_2)$$

tersi de süreklidir. O holde (φ, W_1), S^1 için bir haritadır.

Benzer düşünce ile

$$\varphi_2 : W_2 \subset S^1 \longrightarrow J \subset E^1$$
$$(-\sqrt{1-x_2^2}, x_2) \longrightarrow \varphi_2(-\sqrt{1-x_2^2}, x_2) = x_2$$

$$\varphi_3 : W_3 \subset S^1 \longrightarrow I \subset E^1$$
$$(x_1, \sqrt{1-x_1^2}) \longrightarrow \varphi_3(x_1, \sqrt{1-x_1^2}) = x_1$$

$$\varphi_4 : W_4 \subset S^1 \longrightarrow I \subset E^1$$
$$(x_1, -\sqrt{1-x_1^2}) \longrightarrow \varphi_4(x_1, -\sqrt{1-x_1^2}) = x_1$$

fonksiyonları da homeomorfizmdir. O holde,
$(\varphi_2, W_2), (\varphi_3, W_3)$ ve (φ_4, W_4) de S^1 için haritadır.

Bu şekilde elde edilen

$\{(\varphi_1, W_1), (\varphi_2, W_2), (\varphi_3, W_3), (\varphi_4, W_4)\}$ haritalar kümesi S_1

için bir atlastır.